

- Mini-toetsen worden ter plekke en individueel gemaakt.
 - Electronische apparatuur (telefoon, laptop) mag alleen worden gebruikt voor het openen van de MT.
 - Het tijdens een MT opzoeken van antwoorden op internet of chatten of texten, is verboden.
 - Het is toegestaan eigen papieren aantekeningen, in de vorm van een schrift of notitieblok, te raadplegen.
 - **Voorzie elk antwoord van een berekening en/of motivatie.**
 - Heeft een opgave geen onderdelen, dan is deze 2 punten waard: één punt voor het juiste antwoord, één punt voor de motivatie. Bezit een opgave onderdelen (a), (b), $\dots$, dan is elk onderdeel 2 punten waard.
 - Controleer of je naam en studentnummer op de uitwerkingen staan vermeld.
 - We vragen je vriendelijk na voltooiing je uitwerking zo rustig mogelijk bij de TA in te leveren, om daarna direct te vertrekken.
 - Niet buiten de deur napraten, dat is storend voor degenen die nog bezig zijn.
-

Mini-toets 0: kardinaliteit, maat, en mu-recursie (proeftoets)

1. Laat met behulp van de stelling van Schröder-Bernstein zien dat $(1, 3)$ gelijkmachting is met $[2, 4]$.
2. Bekijk het volgende experiment.

We gooien herhaaldelijk met twee dobbelstenen en noteren telkens de uitkomst. Als die uitkomst dubbel zes is, dan stoppen we met gooien, en noemen we het experiment een succes.

Waar of niet waar, en waarom?

 - (a) Het is zeker dat dit experiment eindigt in een succes.
 - (b) Het is bijna zeker dat dit experiment eindigt in een succes.
3. Geef het functievoorschrift van de functie $g : x \mapsto \mu y(x \mid (y + 3))$. Hint: loop de waarden van x één voor één af.

Antwoorden

1, p. 1: De stelling van Schröder-Bernstein zegt dat twee verzamelingen A en B gelijkmachting zijn zodra er twee injecties $i_1 : A \rightarrow B$ en $i_2 : B \rightarrow A$ bestaan. Bijvoorbeeld

$$\begin{aligned} i_1: (1, 3) &\rightarrow [2, 4] : x \mapsto x + 1. & \text{Immers, } (1, 3) &\xrightarrow{+1} (2, 4) \subseteq [2, 4]. \\ i_2: [2, 4] &\rightarrow (1, 3) : x \mapsto x/2 + 1/2. & \text{Immers, } [2, 4] &\xrightarrow{\div 2} [1, 2] \xrightarrow{+\frac{1}{2}} [1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}] \subseteq (1, 3). \end{aligned}$$

Controleer zelf dat beide afbeeldingen injectief zijn, en dat hun bereik inderdaad binnen het co-domein (de verzameling waar de afbeelding naar toe mag gaan) blijft. Met andere afbeeldingen kan het ook, maar dit zijn wellicht de meest voor de hand liggende.

Een motivatie is een 0.5 punt waard, als de stelling van Schröder-Bernstein juist wordt geciteerd. Het roepen van “twee injecties” of zoiets. Een motivatie is 1 punt waard als gelijkmachting ook werkelijk wordt aangetoond.

2a, p. 1: Onwaar, want er zijn talloze mogelijkheden waarop dit experiment kan falen. Bijvoorbeeld middels de realisatie

$$(5, 1), (4, 3), (6, 5), (6, 2), (1, 5), (4, 4), (2, 1), \dots$$

waarbij de puntjes een rij van geordende paren voorstelt waarin het geordende paar $(6, 6)$ niet voorkomt.

2b, p. 1: Waar, want bijna zeker betekent “met kans 1”.

$$\begin{aligned} P\{\text{nooit een } (6, 6)\} &= P\{1\text{e worp geen } (6, 6) \text{ en } 2\text{e worp geen } (6, 6) \text{ en } 3\text{e worp geen } (6, 6) \dots\} \\ &= P\{1\text{e worp geen } (6, 6)\}P\{2\text{e worp geen } (6, 6)\}P\{3\text{e worp geen } (6, 6)\} \dots \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{35}{36}\right)^n \\ &= 0. \end{aligned}$$

De tweede gelijkheid geldt omdat we mogen aannemen dat de uitkomst van elke volgende worp niet afhangt van de uitkomsten van vorige worpen. Dus

$$\begin{aligned} P\{\text{ooit } (6, 6)\} &= 1 - P\{\text{nooit } (6, 6)\} \\ &= 1 - 0 = 1. \end{aligned}$$

Dus het is bijna zeker dat ooit dubbel zes gegooit wordt. Dus het is bijna zeker dat dit experiment eindigt in een succes.

3, p. 1: – Nul deelt alleen zichzelf, in het bijzonder $0 \nmid (y + 3)$, voor $y = 0$, dus $g(0) = 0$.

– Eén deelt alle getallen, in het bijzonder $1 \mid (y + 3)$ voor alle $y \geq 0$, dus $g(1) = 1$.

– Twee is geen deler van $0 + 3$ dus $g(2) = 0$.

– Drie deelt $0 + 3$, maar niet $1 + 3$, dus $g(3) = 1$.

– Verder geldt dat alle getallen $x \geq 4$ geen deler zijn van $0 + 3$. Dus $g(x) = 0$, voor $x \geq 4$.

Functievoorschrift (middels gevals-onderscheid):

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } x = 0, \\ 1 & \text{als } x = 1, 3, \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$