

Naam: Collegekaart-nummer:

- Legitimatie verplicht.
- Tijdens de eerste 30 minuten mag de zaal niet worden verlaten.
- Op de tafel: legitimatie, tentamenvel, schrijfgerei, rekenmachine, A4tje met aantekeningen, eten, drinken.
- Niet op de tafel: al het overige, in het bijzonder telefoon en/of apparaten met internet.
- Het gebruik van markeerstiften is niet toegestaan.
- Als je naar het toilet wilt, steek dan een vinger op om een surveillant te waarschuwen. Hij of zij zal je toestemming geven om te gaan en met je meelopen naar het toilet. Toiletbezoek is niet toegestaan tijdens het eerste en het laatste halfuur van het tentamen. Redelijkerwijs gaat de surveillant er vanuit dat je hooguit éénmaal tijdens het tentamen het toilet bezoekt.
- Het is verboden een apparaat met internettoegang mee naar het toilet te nemen.
- Verplicht inleveren: alle antwoordbladen, ook als ze leeg zijn.
- Niet verplicht inleveren: de opgavenbladen.
- Nadat de zaal is verlaten, is het niet toegestaan te verblijven in de gangen/hal direct buiten de zaal in verband met geluidsoverlast.
- De instructies van de surveillant dienen te worden opgevolgd.

Meerkeuze antwoorden

- Bij elke vraag is steeds precies één antwoord het juiste. In enkele gevallen kunnen andere antwoorden “bijna juist” of “deels juist” zijn. In dergelijke gevallen geldt het beste antwoord.
- Antwoord in de daarvoor bestemde vakjes door een kruisje te plaatsen. Heb je je vergist, kras dan het kruisje door, en zet een kruisje in een ander vakje.
- Het is mogelijk om aan de surveillant een nieuw antwoordvel te vragen. Onze voorraad vellen is eindig, first come first serve.
- Omdat er verschillende versies van de opgaven bestaan, correspondeert de volgorde van de meerkeuzevragen opgaven niet altijd met de volgorde van de stof zoals die behandeld is in de colleges.

Succes!

	A	B	C	D
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				
6.				
7.				
8.				

	A	B	C	D
9.				
10.				
11.				
12.				
13.				
14.				
15.				
16.				

	A	B	C	D
17.				
18.				
19.				
20.				
21.				
22.				
23.				
24.				

Kladpapier.

Meerkeuzevragen

1. De verzameling $[0, 1]$ bezit [...] elementen als/dan de verzameling $\mathbb{R}$.

- (a) minder
- ☒ evenveel
- (c) meer
- (d) Het goede antwoord staat er niet bij.

Toelichting. Zoals op college aangegeven en op werkcollege verder uitgewerkt kan er een bi-jectie worden gemaakt van $(0, 1)$ naar $\mathbb{R}$. Hoe? Zie slides, of zie anders uitwerkingen hoofdstuk oneindigheid. Dus $(0, 1)$ en $\mathbb{R}$ zijn gelijkmachting (=bezitten evenveel elementen). Het interval $[0, 1]$ bezit twee elementen meer dan het interval $(0, 1)$, te weten 0 en 1. Beide intervallen bezitten oneindig veel elementen, dus de intervallen $[0, 1]$ en $(0, 1)$ zijn ook gelijkmachting. Dus $[0, 1]$ en $\mathbb{R}$ zijn gelijkmachting.

2. De Koch curve, waarvan hieronder het begin getoond wordt,



kan worden genereerd met de volgende Lindenmayer formule:

$$\begin{cases} \text{Axioma: } F \\ \text{Productieregel:} \end{cases}$$

$$\checkmark F \rightarrow F + F - - F + F$$

$$(b) F \rightarrow F - - F + F$$

$$(c) F \rightarrow F + F - F + F$$

$$(d) F \rightarrow F + + F - F + + F$$

3. Laat $X \subseteq [0, 1]$ bestaan uit decimale representaties van alle realisaties van het volgende experiment: net zo lang gooien met een dobbelsteen totdat een zes verschijnt. Dus $0.154336 \in X$, maar ook $0.5152434222141543 \dots \in X$. Welke eigenschappen bezit deze verzameling?

- i) Aftelbaar.
- ii) Als we (uniform) willekeurig een getal r prikken in $[0, 1]$, dan is de kans dat $r \in X$ gelijk aan 0.

- (a) Geen.
- (b) Alleen i).
- ☒ Alleen ii).
- (d) Beiden.

Toelichting. Niet aftelbaar, want X bevat alle getallen met een oneindige decimale expansie met cijfers uit $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Daarop kan bijvoorbeeld diagonalisatie worden toegepast.

Kansmaat nul. Als een willekeurig getal binnen $[0, 1]$ wordt geprikt, is de kans dat een getal wordt geprikt met decimalen buiten $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, i.e. de kans dat een getal wordt geprikt buiten X , gelijk aan 1.

4. Wat is een registermachine?

- ☒ Een eenvoudig rekenmodel welke Turing-compleet is.
- (b) Een eenvoudig rekenmodel welke niet Turing-compleet is.
- (c) Een machine met een eindig aantal registers welke Turing-compleet is.
- (d) Een machine met een eindig aantal registers en vier elementaire instructies.

Toelichting. Een registermachine bevat aftelbaar oneindig veel registers (en is Turing-compleet).

5. Welke van de volgende twee vraagstukken is beslisbaar?

- i) Of er aliens bestaan in het heelal.
 - ii) Of een gegeven programma ooit meer dan 2GB aan RAM geheugen zal gebruiken.
- (a) *i* en *ii*.
 ✓ Alleen uitspraak *i*.
 (c) Alleen uitspraak *ii*.
 (d) Geen van beide uitspraken is waar.

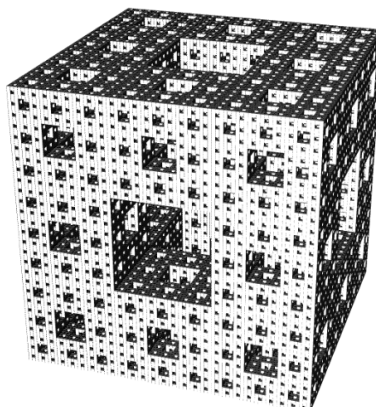
Toelichting. Vraagstuk *i*) is beslisbaar. Als aliens bestaan dan beslist het programma j dat altijd een 1 afdrukt correct over dit vraagstuk. Als aliens niet bestaan dan beslist het programma j' dat altijd een 0 afdrukt correct over dit vraagstuk. Vraagstuk *ii*) is onbeslisbaar. Als het beslisbaar zou zijn dan zou het stop-probleem ook beslisbaar zijn op de volgende manier. Het is eenvoudig in te zien dat elke instantie van het stop-probleem automatisch te vertalen is naar een instantie van het geheugengebruik-probleem: als het originele programma stopt laat dan het geheugengebruik van het afgeleide programma ongelimiteerd toenemen. Als het originele programma niet stopt laat dan het geheugengebruik van het afgeleide programma dan onder de 2GB blijven. Dat laatste is altijd te realiseren door paging. (Je eigen laptop zal misschien ook “slechts” 2GB aan RAM geheugen hebben, maar is uiteraard Turing compleet.)

6. Een stuk code in een inputloos (en deterministisch) Java-programma wordt aangemerkt als *zinloos* of *disfunctioneel* (Eng.: *dead*), als deze nooit wordt bereikt bij de uitvoering van dat programma. Grote programma's bevatten vaak veel zinloze stukken code, en het zou handig zijn als compilers zulke fragmenten zouden kunnen identificeren.

Het herkennen van stukken zinloze code in computer-programma's is echter onbeslisbaar. Hoe zou dat kunnen worden aangetoond?

- (a) Door het zinloze code probleem equivalent te bewijzen aan stopprobleem.
- (b) Door het stopprobleem equivalent te bewijzen aan het zinloze code probleem.
- (c) Door het zinloze code probleem te reduceren naar het stopprobleem.
- ✓ Door het stopprobleem te reduceren naar het zinloze code probleem.

7. De fractale dimensie van Menger's spons

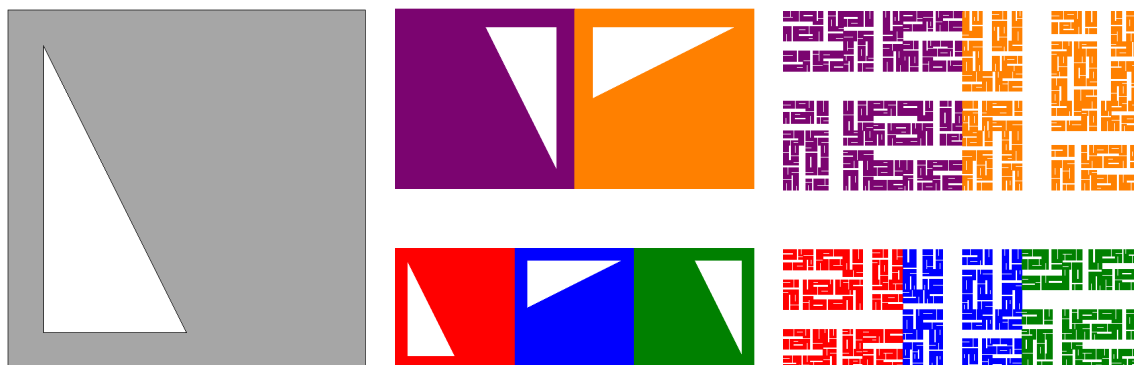


is gelijk aan

- (a) $\log 3 / \log 27$
- (b) $\log 27 / \log 3$
- (c) $\log 3 / \log 20$

$$\sqrt{\log 20 / \log 3}$$

8. Hieronder zie je de eerste en de tiende iteratie van een IFS fractal. De verkleiningsfactor van de vierkanten zijn 2 respectievelijk 3.



Geef een zo nauwkeurig mogelijk antwoord. De Hausdorff dimensie van deze fractal is bevat in

- $\sqrt{(1.465, 2)}$
- (b) $(1.465, 2.322)$
- (c) $(1.791, 2)$
- (d) $(1.791, 2.322)$

Toelichting. $\log(5)/\log(3) = 1.465$ en $\log(5)/\log(2) = 2.322$ maar de dimensie zal onder de twee blijven want de fractal is ingebed in het platte vlak en heeft gaten. Het interval $(1.791, 2)$ is te specifiek, dit antwoord had je om welke reden dan ook niet mogen kiezen want de precieze dimensie van de fractal is 1.78788. Met de middelen die tot je beschikking staan is $(1.465, 2)$ het beste antwoord.

9. Het Gödel-nummer van “Abba” in ASCII is:

- $\sqrt{2^{65}3^{98}5^{98}7^{97}}$.
- (b) $2^{65} + 3^{98} + 5^{98} + 7^{97}$.
- (c) $65^2 98^3 98^5 97^7$.
- (d) $65^2 + 98^3 + 98^5 + 97^7$.

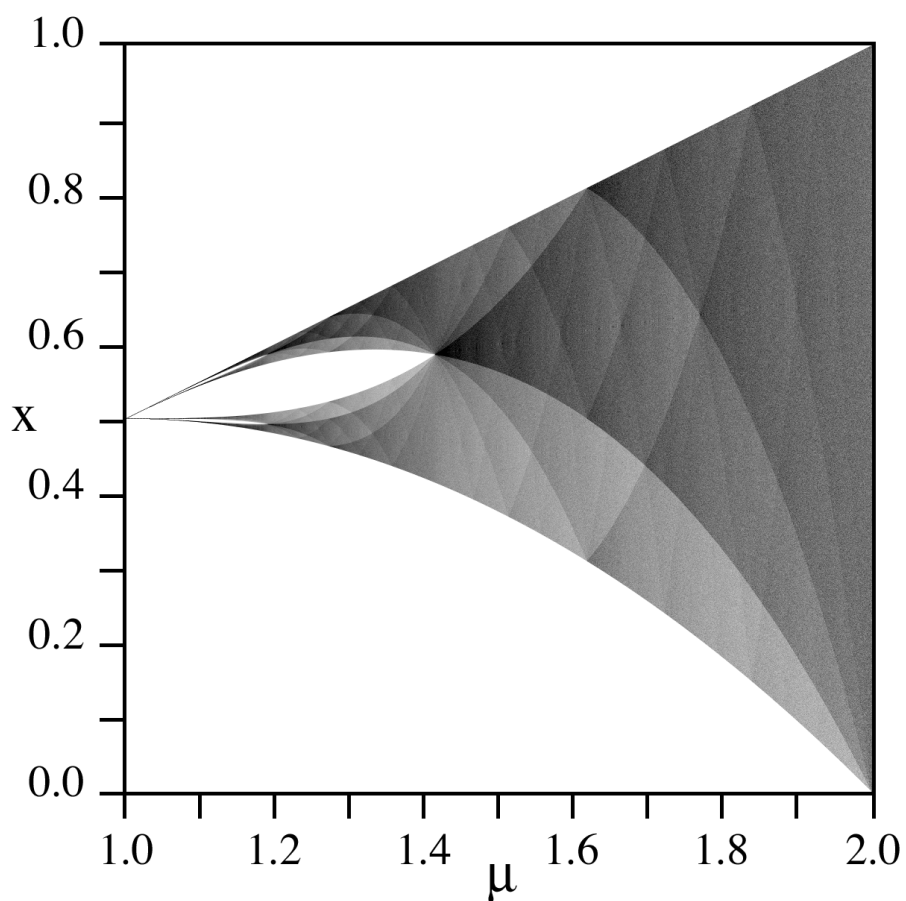
Toelichting. Zie slides en TCBonN, pp. 25-26, 41-45, 453. Voor het goed antwoord hoefde je de ASCII-codes van de letters “A” en “a” hoefde je overigens niet te weten, die konden uit de antwoorden worden gehaald. Ook kon je afleiden dat de quotes niet bij de string horen.

10. Welke van de volgende uitspraken zijn waar?

- i) Conway’s game of life is tijd-reversibel.
- ii) Langton’s ant is tijd-reversibel.
- (a) i) en ii).
- (b) Alleen uitspraak i).
- $\sqrt{\text{Alleen uitspraak ii).}}$
- (d) Het goede antwoord staat er niet bij.

Toelichting. Conway’s game of life is niet tijd-reversibel. Er zijn bijvoorbeeld veel verschillende configuraties die uiteindelijk uitsterven, dus uitmonden in een volledig leeg veld.

11. Wat stelt de volgende afbeelding voor?



✓ Een bifurcatie-diagram.

(b) Een fase-diagram.

(c) Een fase-plot.

(d) Het goede antwoord staat er niet bij.

12. Geef de eerste 10 rotaties van Langton's mier met code RLR.

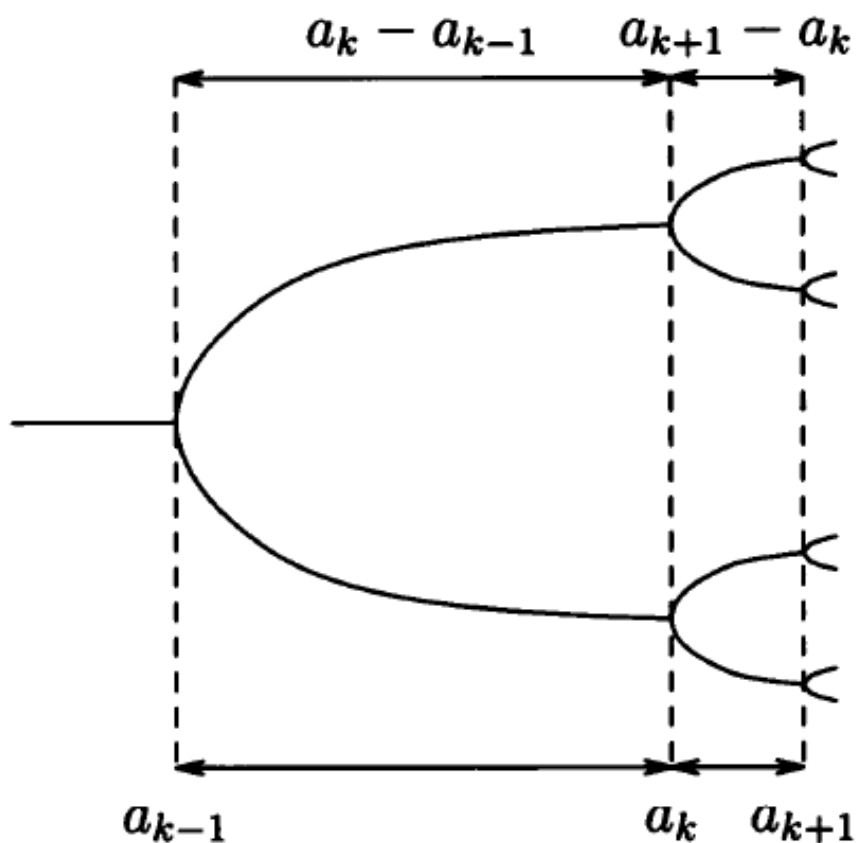
(a) RLRRRLRRR

(b) RRLRRRLRR

(c) RRRLRRRLR

✓ RRRRLRRRL

13. Bekijk het bifurcatiediagram van de logistieke afbeelding:



De limiet van de rij $d_1, d_2, d_3, d_4, \dots$ waarbij

$$d_k = \frac{a_k - a_{k-1}}{a_{k+1} - a_k}$$

heeft een naam.

✓ De constante van Feigenbaum.

(b) De constante van Langton.

(c) De constante van Poincaré.

(d) De constante van Turing.

14. Geef de λ van een 1D CA met $K = 3$, $R = 1$, waarbij de volgende toestand van een cel de som van de omgeving is, modulo drie.

(a) $1/3$.

✓ $2/3$.

(c) $3/7$.

(d) $4/7$.

Toelichting. Er zijn $K^{2R+1} = 3^3 = 27$ mogelijke omgevingen. De volgende omgevingen leiden tot een som die een veelvoud van drie is

	Som	Aantal
omgeving 000	0	1
omgeving 111	3	1
012 en alle permutaties	3	6
omgeving 222	6	1
Totaal		9

Dus

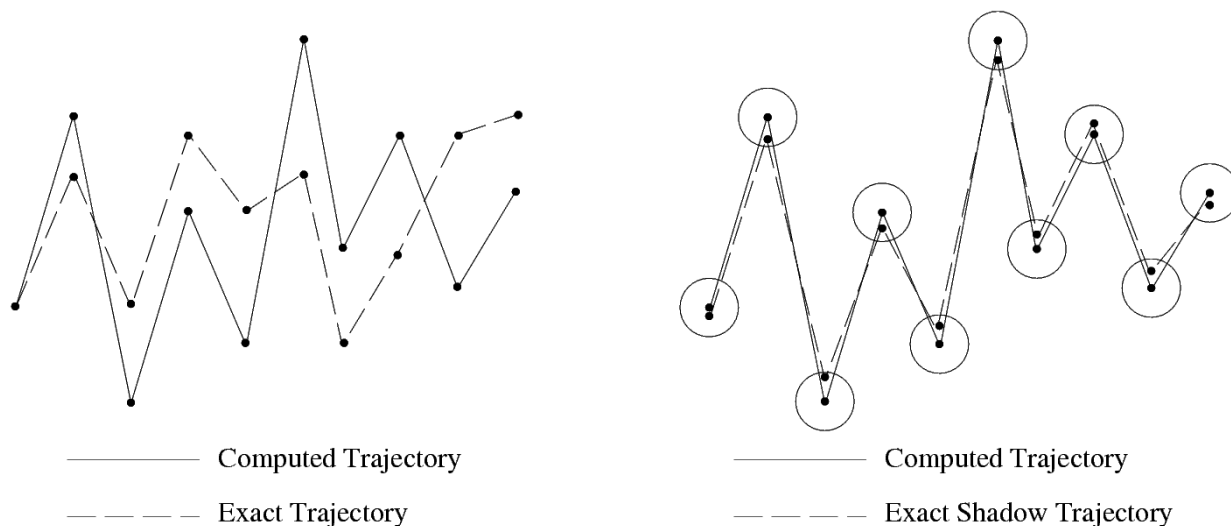
$$\lambda = \frac{27 - 9}{27} = \frac{18}{27} = \frac{2}{3}.$$

N.B., als je $\lambda = 4/7$ hebt, cf. TCBoN, p. 243, na de formule: “Computing λ for the CA rules from the earlier examples requires a little bit of work because our compact representation for the rule tables is not uniformly distributed in the rule space.”

15. Het schaduwlemma voor chaotische systemen kan informeel als volgt worden samengevat:

- (a) Alle reële trajecten worden geschaduwd door berekende trajecten.
- ✓ Alle berekende trajecten worden geschaduwd door reële trajecten.
- (c) Sommige reële trajecten worden geschaduwd door berekende trajecten.
- (d) Sommige berekende trajecten worden geschaduwd door reële trajecten.

Toelichting. Elk berekend traject van een chaotisch systeem kan binnen elke bandbreedte worden benaderd (“geschaduwd”), hoe smal ook, door een theoretisch traject, waarvan het startpunt willekeurig dicht bij het originele startpunt ligt.



16. Een spinnenweb-diagram wordt gebruikt voor het inzichtelijk maken van het gedrag van ...

- (a) ... een semi-periodieke 1-dimensionale functie.
- (b) ... een semi-periodieke 2-dimensionale functie.
- ✓ ... een geïtereerde 1-dimensionale functie.
- (d) ... een geïtereerde 2-dimensionale functie.

17. Gegeven is een 1D CA met K verschillende toestanden en radius R . Hoeveel verschillende waarden kan Langton's λ aannemen voor deze CA?

- (a) K^{2R} .
- (b) K^{2R+1} .
- (c) $K^{2R} + 1$.
- ✓ $K^{2R+1} + 1$.

Toelichting. Er zijn K^{2R+1} verschillende omgevingen. Voor elk van die omgevingen kan de nieuwe toestand van de centrumcel 0 zijn, of niet. Dit geeft $K^{2R+1} + 1$ verschillende mogelijkheden.

Verdere uitleg: de eerste (= 0-de) mogelijkheid is dat geen enkele regel in een 0 eindigt. Dan geldt

$$\lambda = \frac{0}{K^{2R+1}} = 0.$$

De tweede mogelijkheid is dat één regel niet in een 0 eindigt. Dan geldt

$$\lambda = \frac{1}{K^{2R+1}}.$$

Enzovoort. De laatste (= $(K^{2R+1} + 1)$ -de) mogelijkheid is dat alle regels niet in een 0 eindigen. Dan geldt

$$\lambda = \frac{K^{2R+1}}{K^{2R+1}} = 1.$$

18. Wat is GEEN eigenschap van chaotisch gedrag?

Tip: als je moeite hebt met dubbele ontkenningen—wat eigenlijk niet zou mogen omdat je een logicacursus gevolgd hebt—omcirkel dan de antwoorden die WEL eigenschappen van chaotisch gedrag betreffen. Wat dan overblijft zou dan je antwoord moeten zijn.

- ✓ Het is non-deterministisch (= het is onbepaald in de tijd).
- (b) Het is gevoelig voor perturbaties (= het is gevoelig voor kleine veranderingen in startwaarden).
- (c) De verzameling periodieke punten ligt dicht in de toestandruimte.
- (d) Het mixt (er is een punt dat, geïtereerd, dicht ligt in de toestandruimte).

19. De functie $x \mapsto x + 1 \pmod{2\pi}$ is

- (a) Periodiek.
- ✓ Semi-periodiek.
- (c) Convergent.
- (d) Chaotisch.

20. Jarkko Kari publiceerde in 2009 een stelling over cellulaire automaten. Deze zegt het volgende.

- ✓ Er is een configuratie welke oneindig vaak steeds preciezer terugkomt.
- (b) Er is een configuratie welke vanaf een bepaald moment oneindig vaak terugkomt.
- (c) Er is een configuratie welke vanaf een bepaald moment op alle volgende tijdstippen terugkomt.
- (d) Er is een configuratie welke vanaf een bepaald moment op alle volgende tijdstippen steeds preciezer terugkomt.

Toelichting. 20b) en 20c) zijn onjuist omdat de configuratie in kwestie niet noodzakelijk *in z'n geheel* terugkomt; 20d) is onjuist omdat de configuratie in kwestie niet noodzakelijk op *aaneengesloten* tijdstippen steeds preciezer terugkomt.

21. Gegeven is strategie-profiel $((0.3, 0.7), (0.2, 0.8))$.

	C	D
C	(2, 9)	(0, 5)
D	(1, 7)	(6, 0)

- (a) De opbrengst van de rij-speler is 3.62.
- ✓ De verwachte opbrengst van de rij-speler is 3.62.
- (c) De minimale opbrengst van de rij-speler is 2.63.
- (d) De maximale opbrengst van de rij-speler is 2.63.

Toelichting. De verwachte opbrengst van de rij-speler is $0.3 * (0.2 * 2 + 0.8 * 0) + 0.7 * (0.2 * 1 + 0.8 * 6) = 3.62$. Het is geen gegarandeerde opbrengst, want een strategie bestaat uit kansen om een actie te spelen.

22. Welk van de volgende spelen is een coördinatie-spel

- (a) Game of chicken.
- ✓ Stag hunt.
- (c) Battle of the sexes.
- (d) Matching pennies.

Toelichting. De overige spelen zijn anti-coördinatiespelen

23. Hoeveel pure Nash-evenwichten bezit het volgende matrix-spel?

	<i>L</i>	<i>M</i>	<i>R</i>
<i>T</i>	1, 8	8, 7	9, 2
<i>M</i>	4, 3	1, 2	7, 10
<i>B</i>	3, 6	4, 8	0, 2

- ✓ 0.
- (b) 1.
- (c) 2.
- (d) 3.

Toelichting. Wel drie gemixte evenwichten, maar die zijn moeilijk te berekenen en werden niet gevraagd.

24. Geef alle Nash-evenwichten van

	C	D
C	$(1, -1)$	$(0, 4)$
D	$(-1, 0)$	$(1, -1)$

Zoals gebruikelijk staat (p, q) voor het strategieprofiel waarbij de rij-speler met kans p , en de kolom-speler met kans q samenwerkt.

- (a) $\{(1/6, 1/4)\}$.
- (b) $\{(1/4, 1/6)\}$.
- ✓ $\{(1/6, 1/3)\}$.
- (d) $\{(1/3, 1/6)\}$.

Toelichting. Stel, Rij speelt actie C met kans p (dus actie D met kans $1 - p$), en Kolom speelt actie C met kans q (dus actie D met kans $1 - q$).

		q C	$1 - q$ D
p	C	$(1, -1)$	$(0, 4)$
$1 - p$	D	$(-1, 0)$	$(1, -1)$

Met handmatig checken concluderen we dat dit spel geen pure Nash-evenwichten bezit. We gaan op zoek naar een gemengd evenwicht.

$$\begin{aligned} U_{\text{rij}} &= pq \cdot 1 + p(1 - q) \cdot 0 + (1 - p)q \cdot -1 + (1 - p)(1 - q) \cdot 1 \\ &= 1 - 2q + p(3q - 1). \end{aligned}$$

De factor p is voor de volgende stap alvast buiten haakjes gezet. De rij-speler is indifferent als de afgeleide van haar opbrengst, genomen naar de enige parameter die zij kan beïnvloeden, te weten haar eigen strategie p , nul is:

$$\partial U_{\text{rij}} / \partial p = 3q - 1.$$

Dus Rij is indifferent als Kolom speelt met strategie $q = 1/3$. Analoog:

$$\begin{aligned} U_{\text{kol}} &= pq \cdot -1 + p(1 - q) \cdot 4 + (1 - p)q \cdot 0 + (1 - p)(1 - q) \cdot -1 \\ &= -1 + 5p + q(1 - 6p). \end{aligned}$$

De factor q is alvast buiten haakjes gezet. De kolom-speler is indifferent als de afgeleide van zijn opbrengst, genomen naar de enige parameter die hij kan beïnvloeden, te weten zijn eigen strategie q , nul is:

$$\partial U_{\text{kol}} / \partial q = 1 - 6p.$$

Dus Kolom is indifferent als Rij speelt met strategie $p = 1/6$. De oplossingsverzameling voor gemengde evenwichten is nu $\mathcal{O} = \{(1/6, 1/3)\}$.

Eenvoudiger methode. Alle 2×2 matrix-spelen bezitten hoogstens één gemengd evenwicht. Om die reden is er een eenvoudiger methode om het gemengde Nash evenwicht te berekenen. Als deze methode wordt gebruikt is het niet langer nodig om partiële afgeleiden te nemen.

1. Rij bevindt zich in een evenwicht als Kolom zijn strategie, q , zó kiest dat Rij indifferent is aangaande C en D:

$$\begin{aligned} U_{\text{rij}}(C \mid \text{Kol speelt volgens } q) &= U_{\text{rij}}(D \mid \text{Kol speelt volgens } q) \\ \Leftrightarrow q \cdot 1 + (1 - q) \cdot 0 &= q \cdot -1 + (1 - q) \cdot 1 \\ \Leftrightarrow q &= 1/3. \end{aligned}$$

2. Kol bevindt zich in een evenwicht als Rij haar strategie, p , zó kiest dat Kol indifferent is aangaande C en D:

$$\begin{aligned} U_{\text{kol}}(C \mid \text{Rij speelt volgens } p) &= U_{\text{kol}}(D \mid \text{Rij speelt volgens } p) \\ \Leftrightarrow p \cdot -1 + (1 - p) \cdot 0 &= p \cdot 4 + (1 - p) \cdot -1 \\ \Leftrightarrow p &= 1/6. \end{aligned}$$

Kladpapier.