

Naam: Collegekaart-nummer:

- Legitimatie verplicht.
- Tijdens de eerste 30 minuten mag de zaal niet worden verlaten.
- Op de tafel: legitimatie, tentamenvel, schrijfgerei, rekenmachine, A4tje met aantekeningen, eten, drinken.
- Niet op de tafel: al het overige, in het bijzonder telefoon en/of apparaten met internet.
- Het gebruik van markeerstiften is niet toegestaan.
- Als je naar het toilet wilt, steek dan een vinger op om een surveillant te waarschuwen. Hij of zij zal je toestemming geven om te gaan en met je meelopen naar het toilet. Toiletbezoek is niet toegestaan tijdens het eerste en het laatste halfuur van het tentamen. Redelijkerwijs gaat de surveillant er vanuit dat je hooguit éénmaal tijdens het tentamen het toilet bezoekt.
- Het is verboden een apparaat met internettoegang mee naar het toilet te nemen.
- Verplicht inleveren: alle antwoordbladen, ook als ze leeg zijn.
- Niet verplicht inleveren: de opgavenbladen.
- Nadat de zaal is verlaten, is het niet toegestaan te verblijven in de gangen/hal direct buiten de zaal in verband met geluidsoverlast.
- De instructies van de surveillant dienen te worden opgevolgd.

Meerkeuze antwoorden

- Bij elke vraag is steeds precies één antwoord het juiste. In enkele gevallen kunnen andere antwoorden “bijna juist” of “deels juist” zijn. In dergelijke gevallen geldt het beste antwoord.
- Antwoord in de daarvoor bestemde vakjes door een kruisje te plaatsen. Heb je je vergist, kras dan het kruisje door, en zet een kruisje in een ander vakje.
- Het is mogelijk om aan de surveillant een nieuw antwoordvel te vragen. Onze voorraad vellen is eindig, first come first serve.
- Omdat er verschillende versies van de opgaven bestaan, correspondeert de volgorde van de meerkeuzevragen opgaven niet altijd met de volgorde van de stof zoals die behandeld is in de colleges.

Succes!

	A	B	C	D
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				
6.				
7.				
8.				

	A	B	C	D
9.				
10.				
11.				
12.				
13.				
14.				
15.				
16.				

	A	B	C	D
17.				
18.				
19.				
20.				
21.				
22.				
23.				
24.				

Kladpapier.

Meerkeuzevragen

1. Hoe kan de onbeslisbaarheid van het dode code-probleem worden aangetoond?

- (a) Laat zien dat instanties van het dode code-probleem rechtstreeks kunnen worden vertaald naar instanties van het stop-probleem.
- (b) Laat zien dat instanties van het dode code-probleem automatisch kunnen worden vertaald naar instanties van het stop-probleem.
- (c) Laat zien dat instanties van het stop-probleem rechtstreeks kunnen worden vertaald naar instanties van het dode code-probleem.
- ✓ (d) Laat zien dat instanties van het stop-probleem automatisch kunnen worden vertaald naar instanties van het dode code-probleem.

Toelichting. Als je de reductie-richting goed hebt, blijven er nog maar twee antwoorden over. Het adjectief “rechtstreeks” voegt niet zo veel toe, het adjectief “automatisch” zegt veel meer. Dus zal het wel antwoord (d) zijn. Maar, serieus: in een reductie-argument moet de vertaling (de reductie, dus) automatisch plaatsvinden, anders is er geen totaal-algoritme.

2. $X, Y \subseteq \mathbb{N}$ zijn beslisbaar. Welke van de volgende beweringen zijn waar?

- i) $X \cup Y$ is beslisbaar.
- ii) $X - Y$ is beslisbaar.
- (a) Geen enkele.
- (b) Alleen i).
- (c) Alleen ii).
- ✓ (d) Beiden.

Toelichting. Laat P en Q programma's zijn die beslissen over lidmaatschap in respectievelijk X en Y .

Hier is een algoritme om te beslissen of $x \in X \cup Y$: vraag even aan P en Q of $x \in X$, respectievelijk $x \in Y$. P en Q zijn beslissers, dus we kunnen wachten op antwoorden. We kunnen zelfs eerst P vragen, wachten op antwoord, en dan Q vragen. Als één van beiden positief antwoord, is het antwoord ja, anders nee.

Hier is een algoritme om te beslissen of $x \in X - Y$: vraag weer aan P en Q of $x \in X$, respectievelijk $x \in Y$. Als en alleen als P “ja” zegt, en Q “nee”, weten we dat $x \in X - Y$.

3. Welke van de volgende beweringen zijn waar?

- i) Bijna alle deelverzamelingen van $\mathbb{N}$ zijn opsombaar.
- ii) Bijna alle deelverzamelingen van $\mathbb{N}$ zijn complementair opsombaar.
- ✓ (a) Geen enkele.
- (b) Alleen i).
- (c) Alleen ii).
- (d) Beiden.

Toelichting. De verzameling van alle opsombare verzamelingen is aftelbaar, want er zijn slechts aftelbaar veel computerprogramma's om een verzameling op te sommen. De verzameling van alle deelverzamelingen van $\mathbb{N}$, namelijk $2^{\mathbb{N}}$, is overaftelbaar (zou nu zo'n beetje parate kennis moeten zijn, gebruik anders een diagonaalargument). Aftelbaar veel uitzonderingen in een overaftelbare verzameling betekent: “bijna alle”. Dus bijna alle deelverzamelingen van $\mathbb{N}$ zijn niet opsombaar. Dus i) is onwaar.

Complementair opsombare verzamelingen corresponderen 1-1 met opsombare verzamelingen via de complement-operatie. Dus er zijn evenveel complementair opsombare verzamelingen als opsombare

verzamelingen. Dus *ii*) is ook onwaar.

4. Gegeven is Langton's mier met instructie-string *RLRR*, geplaatst op cel $(0, 0)$, in een Noordelijke oriëntatie. Celtoestanden zijn respectievelijk wit, rood, groen en blauw. Op welke cel bevindt de mier zich na 10 stappen?

- (a) $(1, 1)$.
 (b) $(1, -1)$.
 (c) $(-1, 1)$.
 ✓ $(-1, -1)$.

Toelichting. De mier draait als volgt: RRRRLRRRRL.

5. (ACO.) Een mier staat, na het bezoeken van steden *L* en *D*, op stad *E*, en kan van daar kiezen uit de volgende steden. Welke stad zal de mier kiezen bij exploitatie? Neem aan dat $\beta = 1$.

stad	<i>K</i>	<i>B</i>	<i>G</i>	<i>C</i>	<i>A</i>	<i>L</i>	<i>D</i>
feromoon	6	12	8	4	12	5	9
afstand	2	4	2	1	3	3	7

- ✓ *A*, *C* of *G*, elk met kans $1/3$.
 (b) *K* of *B*, elk met kans $1/2$.
 (c) *K* of *B*, met kansen resp. $1/3$ en $2/3$.
 (d) *A*, *C* of *G*, met kansen resp. $6/11$, $2/11$, en $3/11$.

Toelichting.

stad	<i>K</i>	<i>B</i>	<i>G</i>	<i>C</i>	<i>A</i>	<i>L</i>	<i>D</i>
feromoon	6	12	8	4	12	5	9
afstand	2	4	2	1	3	3	7
mv^β	3	3	4	4	4	—	—

Dus steden *A*, *C* en *G* zijn het aantrekkelijkst. Dan is het verder een kwestie van aselekt kiezen.

6. Iemand heeft middels mierenkolonie-optimalisatie een oplossing gevonden voor het handelsreiziger-probleem.

- ✓ Dit is een goede oplossing.
 (b) Dit is de optimale oplossing.
 (c) Dit is een optimale oplossing.
 (d) Dit is in aanleg een optimale oplossing. Om daadwerkelijk een optimale oplossing te krijgen moeten de bezochte steden worden geordend.

Toelichting. Mierenkolonie-optimalisatie, Physarum-optimalisatie, deeltjeszwerm-optimalisatie, vuurvliegjes-optimalisatie en al dit soort algoritmen zijn benaderingsalgoritmen. Zij benaderen oplossingen van het handelsreiziger-probleem, het rugzak-probleem, en andere NP-moeilijke problemen. Oplossingen die dergelijke algoritmen leveren zijn goede, en misschien wel optimale oplossingen. Echter, we kunnen nooit weten of een dergelijke oplossing optimaal is. Het kan zijn dat, als je een benaderingsalgoritme niet stopt maar langer laat doorlopen, er op de lange duur toch nog een betere oplossing gevonden wordt. Antwoord 6d is lang maar verder onzinnig: een toer is per definitie een ordening van steden, dus ga je een toer “ordenen” dan verdwijnt juist informatie over die toer.

7. (Het Physarum-model van Jones en Adamatzky.) Deeltjes lopen over een canvas van 100×100 . De randen zijn geïdentificeerd zoals een torus. De stapgrootte is 2 en de draaihoek is 45° . Waar kan over worden gesproken?

- (a) Discrete ruimte, discrete vrijheid.
 ✓ Discrete ruimte, continue vrijheid.
 (c) Continue ruimte, discrete vrijheid.
 (d) Continue ruimte, continue vrijheid.

Toelichting. De deeltjes lopen over een grid, dus de ruimte is discreet. De deeltjes stappen met een constante stap-grootte 2 en draaien af en toe 45° links of rechts. De afwisseling van schuine en rechte stappen zorgt er voor dat deeltjes in principe overal kunnen komen. Dus continue vrijheid.

8. (Deeltjeszwerm-optimalisatie.) Gegeven is een deeltje met plaats $s = (3, 2)$, en snelheid

$$v = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

De beste oplossing welke het deeltje tot nu toe zelf heeft gevonden, bezit coördinaten $P = (1, 4)$. De tot nu toe beste globale oplossing bevindt zich op positie $G = (2, 7)$. Verder is de traagheid van deeltjes gelijk aan $I = 0.9$, en is de aantrekkingskracht van de globale oplossing gelijk aan $A_G = 0.3$. Er is geen ruis of verstoring. Bereken de nieuwe snelheidsvector.

- (a) (3.48, 3.86).
- (b) (3.84, 3.68).
- ✓ (4.33, 3.89).
- (d) Een ander antwoord.

Toelichting. Er geldt

$$v_P = P - s = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ en } v_G = G - s = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Dus

$$\begin{aligned} v_{\text{nieuw}} &= Iv + (1 - I)[A_P v_P + A_G v_G] \\ &= 0.9 \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} + (1 - 0.9) \left[0.7 \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} + 0.3 \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{pmatrix} 4.33 \\ 3.89 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

9. (Vuurvliegjes-optimalisatie.) Van twee deeltjes s_1 en s_2 is de locatie respectievelijk $(2, 5)$ en $(4, 8)$. De fitness-waarde van deze deeltjes op die locaties is respectievelijk 0.5 en 0.7. Verder is gegeven dat $\alpha = 1$, $\beta = 3.03925$, $\gamma = 10^{-3}$, en ϵ een paar van toevals-variabelen, op elk van de twee coördinaten in de zoekruimte één. Op het moment dat s_1 en s_2 vergeleken worden, neemt ϵ de waarde $(0.66, -0.21)$ aan.

Bereken van beide deeltjes de nieuwe locatie, in twee decimalen.

- (a) (7.65, 12.80).
- (b) (8.65, 13.80).
- ✓ (8.66, 13.79).
- ✓ Een ander antwoord.

Toelichting. 08 mrt 2025: er wordt gevraagd naar de nieuwe locatie van twee deeltjes, terwijl het antwoord alleen de nieuwe locatie van het één deeltje geeft, of “Een ander antwoord”. Antwoord (d) is daardoor formeel ook juist. Dit antwoord wordt dus ook goed gerekend.

Dan nu de berekening zelf. De afstand tussen s_1 en s_2 is

$$r_{12} = \sqrt{(4 - 2)^2 + (8 - 5)^2} = \sqrt{13}.$$

De functiewaarde bij s_2 is groter dan die bij s_1 , dus s_1 zal bewegen, en s_2 zal op haar plaats blijven.

$$\begin{aligned}
 s_1^{\text{nieuw}} &= s_1 + \beta e^{-\gamma r_{12}^2} (s_2 - s_1) + \alpha \epsilon \\
 &= \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \beta e^{-10^{-3} \times 13} \left[\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right] + 1 \begin{pmatrix} 0.66 \\ -0.21 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + 3.03925 \cdot e^{-0.013} \left[\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} 0.66 \\ -0.21 \end{pmatrix} \\
 &\approx \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.66 \\ -0.21 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 8 \\ 14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.66 \\ -0.21 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 8.66 \\ 13.79 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Het exacte antwoord is overigens gelijk aan.

$$\begin{pmatrix} 8.659990914720818 \dots \\ 13.78998637208122 \dots \end{pmatrix}$$

10. (Door de natuur geïnspireerde algoritmen.) Welke conclusie geldt NIET?

- (a) Veel beschrijvingen van NI-algoritmen zijn onnodig vaag.
 - (b) Veel beschrijvingen van NI-algoritmen leggen te veel nadruk op de metafoor zélf.
 - (c) Om een NI-algoritme op waarde te schatten, moet door de metafoor worden heengekeken.
 - (d) Nogal wat metaforen gaan mank aan bruikbare ideeën voor optimalisatie.
 - (e) Het komt te vaak voor dat de metafoor en het voorgestelde algoritme niet met elkaar overeenstemmen.
 - (f) Het komt te vaak voor dat het voorgestelde algoritme en de implementatie niet met elkaar overeenstemmen.
 - (g) Nogal wat NI-algoritmen gebruiken concepten die eigenlijk al jaren bekend zijn in het domein van evolutionaire algoritmen.
 - (h) Veel NI-algoritmen blijken, na studie, varianten van ACO, PSO, en $\lambda + \mu$ -ES.
 - (i) NI-algoritmen zijn obscuur, en worden hoofdzakelijk in ondermaatse tijdschriften gepubliceerd.
- (a) 10g
(b) 10d
✓ 10i
(d) Een ander antwoord.

Toelichting. (10i): de laatste jaren is er juist veel aandacht voor NI-algoritmen. Artikelen worden regelmatig geplaatst in tijdschriften met een redelijke tot hoge impact factor, uitgegeven door gerenommeerde wetenschappelijke uitgeverijen, zoals Springer, Elsevier, en Taylor & Francis. Beide feiten werden geadstrueerd in het hoorcollege.

Merk ook op dat conclusie (10i), in tegenstelling tot bijna alle andere conclusies, categorisch is, en daardoor dus al geheel op zichzelf vatbaarder is voor weerlegging. Vergelijk bijvoorbeeld de beweringen “Alle mannen zijn haantjes” vs. “De meeste mannen zijn haantjes”. De eerste bewering kan al worden weerlegd door slechts één man aan te wijzen welke geen haantje is. Overigens is de tweede bewering ook niet waar. Immers, mannen zijn geen hanen. Samengevat kan de laatste vraag dus eigenlijk met grote kans goed worden beantwoord door iemand zonder inhoudelijke kennis maar met een redelijk analytisch vermogen.

11. Langton's (originele) mier is geplaatst op cel (0, 0), in een Noordelijke oriëntatie. De eerste stap die de mier neemt, is dus naar rechts.

- i) Elke keer als de mier op cel (1, 0) verschijnt, zal deze de cel in Noordelijke danwel Zuidelijke richting verlaten.

- ii) Elke keer als de mier op cel (17, 16) verschijnt, zal deze de cel in Noordelijke danwel Zuidelijke richting verlaten.
- (a) Geen enkele.
 (b) Alleen i).
 (c) Alleen ii).
 ✓ Beiden.

Toelichting. Al tijdens de eerste stap komt de mier aan op cel (1, 0), in Oostelijke oriëntatie, dus horizontaal. Als Langton's mier horizontaal op een veld aankomt, komt deze in het vervolg *altijd* horizontaal op dat veld aan. Bijgevolg zal de mier de volgende stap de cel in Noordelijke danwel Zuidelijke richting verlaten.

Als de mier nooit op cel (17, 16) verschijnt, is implicatie ii) waar. Immers, elke implicatie met een onware antecedent is waar (cursus Inleiding Logica). Nu is het inderdaad zo dat de mier nooit op cel (17, 16) verschijnt, dus ii) is waar, en de vraag is beantwoord. Tenzij je tijdens het tentamen Langton's mier in je programmeerbare rekenmachine hebt verstoep, is er geen tijd om te verifiëren of de mier al dan niet op cel (17, 16) verschijnt. Je zult dus hypothetisch moeten gaan redeneren: áls de mier op cel (17, 16) verschijnt, komt deze dan altijd horizontaal aan?

Cellen waar de mier horizontaal aankomt zijn gerangschikt als bruine velden op een schaakbord. Via een loper-beweging kan diagonaal gereisd worden van cel (1, 0) naar cel (17, 16). Dit veld is ook bruin. Dus als de mier op cel (17, 16) verschijnt, zal deze de volgende stap de cel óók in Noordelijke danwel Zuidelijke richting verlaten.

12. Van welke periode ontbreken nog oscillatoren in Conway's Game of Life?

- (a) 41
 (b) 19 en 34.
 (c) 19 en 41.
 ✓ Geen enkele.

Toelichting. Geen enkele: voor elke $n \geq 2$ is er wel een oscillator ontdekt, of valt te beargumenteren dat er een oscillator kan worden gebouwd uit oscillatoren met een lagere periode en verbindings-configuraties (*Snark loop* is bijvoorbeeld zo'n oscillator-bouwsteen). De laatste ontbrekende periodes, 19 en 41, werden ontdekt in Juli 2023.

13. Gegeven is de 1-dimensionale cellulaire automaat met $k = 5$ mogelijke toestanden, met omgeving-straal $r = 3$, en met transitie-code

00010110110212022324232423434.

De automaat staat momenteel in configuratie 43302143. Bepaal de configuratie van de automaat in de volgende generatie.

- (a) 23224332.
 (b) 23233224.
 ✓ 24232332.
 (d) 24233223.

Toelichting. Omdat de automaat bestaat uit 8 cellen, en elke omgeving uit 7 cellen, is de omgeving-som van elke cel snel uit te rekenen. Dit is gewoon de som van alle toestanden minus de toestand van de cel buiten de omgeving (dat is vier posities verder, naar rechts of links, dat maakt niet uit). De som van alle toestanden in de 1e generatie is overigens $4 + 3 + 3 + 0 + 2 + 1 + 4 + 3 = 20$.

Om de nieuwe configuratie te bepalen is het handig de posities in de transitie-code te markeren. (Voorlopig alleen veelvouden van vijf, om drukte te voorkomen.) Als geteld wordt vanaf nul, stemmen deze posities meteen ook overeen met omgeving-sommen:

toestand	0	0	0	1	0	1	1	0	2	1	2	0	2	2	3	2	4	2	3	2	4	2	3	4	3	4
positie	0			5				10					15	16	17	18	19	20					25		28	

Nu is het een kwestie van sommen koppelen aan nieuwe toestanden.

huidige configuratie	4	3	3	0	2	1	4	3
omgeving-som	$20 - 2$	$20 - 1$	$20 - 4$	$20 - 3$	$20 - 4$	$20 - 3$	$20 - 3$	$20 - 0$
	18	19	16	17	16	17	17	20
nieuwe configuratie	2	4	2	3	2	3	3	2

14. Welke van de onderstaande beweringen is NIET waar?

- ✓ Langton's mier is een cellulaire automaat.
- (b) Langton's mier is tijd-reversibel.
- (c) Langton's mier is Turing-volledig.
- (d) Op een blank grid bouwt Langton's mier altijd een snelweg.

Toelichting. Langton's mier is geen cellulaire automaat, want deze doet aan state push. Wél kan een cellulaire automaat worden gebouwd welke Langton's mier emuleert, maar dat was niet de vraag. Dat op een blank grid Langton's mier een snelweg bouwt is met één experiment te verifiëren. Daarnaast is er het algemeen vermoeden dat Langton's mier ook snelwegen bouwt op willekeurige begin-configuraties. Dit vermoeden is tot nu toe bewezen noch weerlegd.

15. Welke bewering is NIET waar

- ✓ Elk NP-moeilijk probleem is NP-volledig.
- (b) Elk NP-volledig probleem is NP-moeilijk.
- (c) Bewijsbaarheid in propositie-logica is co-NP-volledig.
- (d) Bewijsbaarheid in predikaten-logica is semi-beslisbaar.

Toelichting. Zonder kennis van de overige antwoord-alternatieven kun je al weten dat (a) juist is. Immers, een probleem is NP-volledig als en slechts als het NP is, en NP-moeilijk.

- (a) Je hoeft dus niet bekend te zijn met het gegeven dat bewijsbaarheid in propositie-logica co-NP-volledig is, alhoewel dit wel terloops werd vermeld tijdens het college "Berekenbaarheid" als onderdeel van mijn antwoord op een vraag uit de zaal wat semantische tableaux zijn.
- (b) Een probleem is NP-moeilijk als en slechts als het minstens zo moeilijk als elk ander NP-probleem.
- (c) Er zijn NP problemen die niet NP-moeilijk zijn, bijvoorbeeld alle P-problemen.
- (d) De semi-beslisbaarheid van de predikatenlogica werd besproken in het colleges over berekenbaarheid.
- (e) Vervulbaarheid in propositie-logica is NP-volledig (college mierenkolonie-optimalisatie). Een propositie is bewijsbaar als en slechts als de negatie niet vervuld kan worden. Bewijsbaarheid is dus co-NP-volledig.

16. Omschrijf wat het betekent als een berekening geënt is op een biologisch organisme.

- (a) De berekening emuleert een organisme op speciaal daartoe ontworpen hardware.
- (b) De berekening simuleert een organisme op speciaal daartoe ontworpen hardware.
- ✓ De berekening vindt plaats op een gecultiveerde infrastructuur in het organisme.
- (d) De berekening vindt plaats op hardware welke is geïmplanteerd in een biologisch organisme.

Toelichting. Op biologische organismen geënte berekening is een term die doelt op processen die plaatsvinden in of op reële biologische organismen. Op biologische organismen geïnspireerde berekening is een term die doelt op processen die zijn geïnspireerd op de werking van biologische organismen, maar die plaatsvinden in traditionele hardware, zoals hedendaagse CPU's en GPU's. Ook hoeft een geëmulleerd proces geen 100% getrouwe afspiegeling te zijn van het oorspronkelijke biologische proces.

17. Welke van de volgende beweringen zijn waar?

- i) De Turing-machine bezit een eindige tape.
 ii) De Turing-machine bezit een eindig geheugen.
- (a) Geen enkele.
 (b) Alleen i).
 ✓ Alleen ii).
 (d) Beiden.

Toelichting. Als een Turing-machine niet mag rekenen op een oneindige tape, reduceert deze tot een eindige automaat. Als een Turing-machine mag beschikken over een oneindig geheugen, kan het alle functies $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ uitrekenen door ze hard te coderen in de (nu oneindige) transitie-tabel. Op deze manier verliest het begrip “berekenbare functie” haar betekenis.

18. Druk de functie $f : \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N} : (x, y, z) \mapsto 5$ uit in elementaire bouwstenen.

- ✓ $S^5 \circ Z \circ \pi_2^3$.
 (b) $S^5 \circ Z \circ \pi_2^3(0)$.
 (c) $\pi_1^3 \circ Z \circ S^5(0)$.
 (d) $\pi_1^3 \circ Z \circ S^6(0)$.

Toelichting. Er geldt: $(x, y, z) \xrightarrow{\pi_2^3} y \xrightarrow{Z} 0 \xrightarrow{S^5} 5$. De 0 als argument is niet nodig, daar zorgt de Z functie voor.

19. Gegeven is $f(x, y) = 3 \% x$. Bepaal $\mu y f(x, y)$.

- ✓ 0 als $x = 1$ of $x = 3$, $\perp$ anders.
 (b) 1 als $x = \perp$ of $x = 3$, 0 anders.
 (c) $\perp$ als $x = 1$ of $x = 3$, 0 anders.
 (d) Het goede antwoord staat er niet bij.

Toelichting.

$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
2	$\perp$	0	1	0	3 ...
1	$\perp$	0	1	0	3 ...
0	$\perp$	0	1	0	3 ...
$x \rightarrow$	0	1	2	3	4 ...

In $3 \% x$ doet y niet mee, dus hoeft eigenlijk alleen maar naar x -waarden gekeken te worden.

Als $x = 0$ is $3 \% x$ ongedefinieerd, dus zijn er ook geen laagste nul-waarden. Dus $\mu y f(0, y) = \perp$. Vanzelfsprekend $\mu y f(1, y) = 0$. Voor $x = 2$ geldt $3 \% x = 3$, dus deze kolom bezit geen nul-waarden, dus ook geen minimale nul-waarden. Dus $\mu y f(2, y) = \perp$. Vanzelfsprekend $\mu y f(3, y) = 0$. Tenslotte geldt $3 \% x = 3$, voor $x > 3$, dus daar bezit $3 \% x$ ook geen nul-waarden, dus ook geen minimale nul-waarden. Dus $\mu y f(x, y) = \perp$, voor $x > 3$.

20. Evalueer de expressie $(\lambda x.(\lambda y.x))8$.

- (a) $\lambda x.8$.
 ✓ $\lambda y.8$.
 (c) $\lambda x.(\lambda y.8)$.
 (d) Het goede antwoord staat er niet bij.

Toelichting. De expressie $(\lambda x.(\lambda y.x))8$ zegt: vervang elk vrij voorkomen van x in de expressie $\lambda y.x$ door het getal 8. En dan krijg je de constante functie $\lambda y.8$. Semantisch geldt $\lambda x.8 \equiv \lambda y.8$, maar $\lambda x.8$ is niet het product van evaluatie.

21. Welke van de volgende verzamelingen zijn aftelbaar?

- i) De verzameling van alle eindige strings over een eindig alfabet.
 - ii) De verzameling van alle eindige strings over een aftelbaar alfabet.
- (a) Geen enkele.
 (b) Alleen i).
 (c) Alleen ii).
 ✓ Beiden.

Toelichting. Stel het alfabet is eindig, bv. de eerste 26 kleine letters van ons westers alfabet. Een voorbeeld van een aftelling is dan

a, b, c, ..., z, aa, ab, ..., az, ba, bb, ..., zz, aaa, aab, ..., zzz, aaaa, aaab, ..., zzzz, aaaaa,

Stel het alfabet is aftelbaar. Dan is het eindig of aftelbaar oneindig. Het eindige geval is zojuist besproken.

Stel het alfabet is aftelbaar oneindig, bv. $A = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$. Laat A_i bestaan uit de eerste i symbolen van A . Dan is de verzameling van alle eindige strings over A_i , genoteerd als S_i , volgens het eerste onderdeel aftelbaar. Een aftelbare vereniging van aftelbare verzamelingen is nog steeds aftelbaar (college Kardinaliteit). Dus de aftelbare vereniging $S =_{Def} \bigcup_{i=0}^{\infty} S_i$ is ook nog steeds aftelbaar. S bevat alle eindige strings over het alfabet A .

Je had het antwoord ook op inzicht kunnen gokken door je te realiseren dat, bij oneindige verzamelingen, kardinaliteits-sprongen typisch veroorzaakt worden door machtsverzameling-constructies.

22. Bekijk de verzamelingen $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ en $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Welke van de volgende beweringen zijn waar?

- i) $\{0, 1\}^{\mathbb{N}} \leq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.
 - ii) $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \leq \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.
- (a) Geen enkele.
 (b) Alleen i).
 (c) Alleen ii).
 ✓ Beiden.

Toelichting. $\{0, 1\}^{\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, dus meteen $\{0, 1\}^{\mathbb{N}} \leq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \leq \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ is ook waar door een functie $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, gerepresenteerd als een rij getallen, te coderen als oneindige bitstring, waarbij functiewaarden in unaire notatie worden gescheiden door nullen, bijvoorbeeld $3, 1, 5, 2, 2, 3, \dots \rightarrow 1110101111101101101110\dots$. Deze codering is injectief. Het is geen bi-jectie: het is niet verboden dat in een oneindige bit string een aaneengesloten oneindige rij 1-en.

Je had je antwoord ook op inzicht kunnen gokken door je te realiseren dat, bij oneindige verzamelingen, kardinaliteits-sprongen typisch veroorzaakt worden door machtsverzameling-constructies.

23. De Church-Turing these is nog steeds van kracht bij

- (a) Echte (i.e., ongeklokte) asynchroniciteit.
 - (b) Invoer veroorzaakt door muis-bewegingen van een gebruiker.
- ✓ Parallele berekening op een grafische kaart.
 (d) Updates van buitenaf.

Toelichting. Parallele berekening op een grafische kaart wordt geserialiseerd via een PCI-express en gesynchroniseerd via een interne klok. Dit feit werd besproken op college, en het leidt je alleen al naar het goede antwoord.

Een computerprogramma welke input van buitenaf mag gebruiken, kan in principe elke oneindige bit string afdrukken. Bijvoorbeeld:

```
while ( true ) {  
    werp buiten de computer een muntstuk op, en voer het resultaat in  
    als het kop is, druk een 1 af  
    druk anders een 0 af  
}
```

Hetzelfde geldt voor zaken als willekeurige invoer van buitenaf, updates van buitenaf, en echte asynchroniciteit.

24. Turing's stop-probleem is

- (a) beslisbaar.
- (b) berekenbaar.
- ✓ semi-beslisbaar.
- (d) complementair opsombaar.

Toelichting. Turing's stop-probleem is onbeslisbaar, dus het eerste antwoord valt al af. Berekenbaarheid gaat over functies, dus dit antwoord valt ook af. Turing's stop-probleem is semi-beslisbaar: ben je geïnteresseerd in de vraag of een programma op zijn invoer stopt, voer dan gewoon dat programma uit op die invoer. Als het programma de eigenschap heeft dat het op die invoer stopt, dan zal dit op den duur ook gebeuren, en krijgen we uitsluitel. En als de betreffende programma/input-combinatie die eigenschap niet heeft, zal het programma inderdaad ook niet op die invoer stoppen, en krijgen we nooit uitsluitel, wat in lijn is met het concept semi-beslisbaarheid.

Complementair opsombaar is Turing's stop-probleem niet, want semi-beslisbaarheid is hetzelfde als opsombaarheid, wat samen met complementaire opsombaarheid (volgens de stelling van Post) beslisbaarheid zou impliceren, wat niet kan.

Einde opgaven.
Antwoorden vanavond.